Лекция 14

Уравнения гидротермодинамики для мезопроцессов

Цель: объяснение подходов построения уравнений для мезопроцессов на основе полных уравнений гидротермодинамики

Основы математического моделирования атмосферных процессов, лектор ассоциированный профессор Маусумбекова Сауле Джумакановна

Постановка задачи

В качестве исходных используем уравнения гидротермодинамики — уравнения (2.21) гл. II. Опуская в уравнениях движения по горизонтали члены $2\omega_y w$ и $2\omega_x w$, в уравнении движения по вертикали — члены, содержащие силу Кориолиса, а в уравнении неразрывности — член $\partial\rho/\partial t$ в виду их малости и полагая $k=\mathrm{const}$, указанную систему уравнений перепишем в виде:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + lv + k'\,\Delta u + k\frac{\partial^2 u}{\partial z^2};$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - lu + k'\,\Delta v + k\frac{\partial^2 v}{\partial z^2};$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g + k'\,\Delta w + k\frac{\partial^2 w}{\partial z^2};$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0;$$

$$p = R\rho T;$$

$$\frac{dT}{dt} - \frac{\gamma_a}{g\rho}\frac{dp}{dt} = \frac{1}{c_p\rho}(\varepsilon_л + \varepsilon_ф) + k'\,\Delta T + k\frac{\partial^2 T}{\partial z^2};$$

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{m}{\rho} + k'\,\Delta q + k\frac{\partial^2 q}{\partial z^2}, \qquad (1.1)$$

Методы аппроксимации

Положим, что:

$$T(x, y, z, t) = \overline{T}(z) + T'(x, y, z, t);$$
$$p(x, y, z, t) = \overline{p}(z) + p'(x, y, z, t);$$
$$\rho(x, y, z, t) = \overline{\rho}(z) + \rho'(x, y, z, t);$$
$$q(x, y, z, t) = \overline{q}(z) + q'(x, y, z, t), \qquad (1.2)$$

где функции с чертой являются известными (стандартными или фоновыми) величинами, зависящими только от высоты, а функции со штрихом — возмущениями, зависящими от всех координат и времени, и что

$$\left|\frac{T'}{\overline{T}}\right| \ll 1, \quad \left|\frac{p'}{\overline{p}}\right| \ll 1, \quad \left|\frac{\rho'}{\overline{\rho}}\right| \ll 1, \quad \left|\frac{q'}{\overline{q}}\right| \ll 1. \qquad (1.3)$$

Для стандартных значений принимаем:

$$\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial \overline{p}}{\partial z} + g = 0; \quad \overline{p} = R\overline{\rho}\,\overline{T}; \quad \frac{\partial \overline{T}}{\partial z} = -\overline{\gamma}; \quad \frac{\partial \overline{q}}{\partial z} = -\overline{\gamma}_q. \qquad (1.4)$$

Методы решения

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \ldots$$

При $|x| \ll 1$ можно принять, что $\ln(1+x) \approx x$. Преобразуем теперь члены уравнений движения, описывающие силу барического градиента. Проделаем это подробно для члена $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$. Имеем

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{RT}{p}\frac{\partial p}{\partial x} = RT\frac{\partial \ln p}{\partial x} = RT\frac{\partial}{\partial x}\left[\ln\left(\frac{\bar{p}+p'}{\bar{p}}\bar{p}\right)\right] =$$

$$= RT\frac{\partial}{\partial x}\left[\ln\left(1+\frac{p'}{\bar{p}}\right) + \ln\bar{p}\right] = RT\frac{\partial}{\partial x}\left[\ln\left(1+\frac{p'}{\bar{p}}\right)\right] \approx RT\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p'}{\bar{p}}\right).$$

Проделывая аналогичные преобразования для члена $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$, положив $T = T_{\text{ср}}$, где $T_{\text{ср}}$ — средняя температура атмосферы, и введя обозначение

$$\Phi = RT_{\text{ср}}\frac{p'}{\bar{p}}, \qquad (1.5)$$

получаем:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \approx \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \qquad (1.6)$$

.

Методы решения

Для силы барического градиента в вертикальном направлении имеем

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=RT\frac{\partial}{\partial z}\left[\ln\left(1+\frac{p'}{\bar{p}}\right)+\ln\bar{p}\right]\approx\frac{\partial\Phi}{\partial z}+RT\frac{\partial}{\partial z}(\ln\bar{p}).$$

Но при учете соотношений (1.4)

$$RT\frac{\partial}{\partial z}\ln\bar{p}=\frac{RT}{\bar{p}}\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}=-\frac{RT}{\bar{p}}g\bar{\rho}=-g\frac{T}{\bar{T}}=-g\frac{\bar{T}+T'}{\bar{T}}=$$

$$=-g-g\frac{T'}{\bar{T}}\approx-g-g\frac{T'}{T_{\text{ср}}},$$

поэтому

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\approx\frac{\partial\Phi}{\partial z}-g-g\frac{T'}{T_{\text{ср}}}.$$

Остальные члены в уравнениях движения остаются без изменения.

Методы решения

Займемся теперь преобразованием уравнения неразрывности. Предварительно представим его в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}+\left[\frac{1}{\rho}\left(u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}+w\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)\right]=0.$$

Рассмотрим сумму членов этого уравнения, заключенных в квадратные скобки. Перепишем ее в виде

$$u\frac{\partial}{\partial x}\ln\rho+v\frac{\partial}{\partial y}\ln\rho+w\frac{\partial}{\partial z}\ln\rho$$

или, учитывая, что $\ln\rho\approx\rho'/\bar{\rho}+\ln\bar{\rho}$,

$$u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right)+v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right)+w\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right)+\frac{w}{\bar{\rho}}\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z}.$$

Методы решения

Первые три члена этой суммы, содержащие малую величину ρ', малы, а в последнем члене

$$\frac{1}{\bar\rho}\frac{\partial\bar\rho}{\partial z}=\frac{R\bar T}{\bar p}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\bar p}{R\bar T}\right)=\frac{1}{\bar p}\left(\frac{\partial\bar p}{\partial z}-\frac{\bar p}{\bar T}\frac{\partial\bar T}{\partial z}\right)=\frac{1}{\bar p}\left(-g\bar\rho+\frac{\bar p}{\bar T}\bar\gamma\right)=$$

$$=\left(-\frac{g}{R\bar T}+\frac{\bar\gamma}{\bar T}\right)=-\frac{g-R\bar\gamma}{R\bar T}\approx-\frac{g-R\bar\gamma}{RT_{\text{ср}}}.$$

Учитывая сказанное, уравнение неразрывности перепишем в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\sigma w,$$

где

$$\sigma=(g-R\bar\gamma)/RT_{\text{ср}}.$$

Методы решения

В уравнении притока тепла:

$$\frac{dT}{dt}=\frac{dT'}{dt}+\frac{d\overline{T}}{dt}=\frac{dT'}{dt}+w\frac{\partial\overline{T}}{\partial z}=\frac{dT'}{dt}-\overline{\gamma}w;$$

$$\frac{dp}{dt}=\frac{dp'}{dt}+\frac{d\overline{p}}{dt}\approx w\frac{\partial\overline{p}}{\partial z}=-wg\overline{\rho};$$

$$\frac{\gamma_a}{g\rho}\frac{dp}{dt}\approx\frac{\gamma_a}{g\overline{\rho}}w\frac{\partial\overline{p}}{\partial z}\approx-\gamma_a w.$$

В уравнении переноса влаги

$$\frac{dq}{dt}=\frac{dq'}{dt}+\frac{d\overline{q}}{dt}=\frac{dq'}{dt}+w\frac{\partial\overline{q}}{\partial z}\approx\frac{dq'}{dt}-w\overline{\gamma}_q.$$

Учитывая все сказанное, приходим к следующей системе уравнений гидротермодинамики мезопроцессов:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + lv + k' \Delta u + k \frac{\partial^2 u}{\partial z^2};$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - lu + k' \Delta v + k \frac{\partial^2 v}{\partial z^2};$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} + g\beta + k' \Delta w + k \frac{\partial^2 w}{\partial z^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \sigma w;$$

$$\frac{dT'}{dt} + (\gamma_а - \bar{\gamma})\, w = \frac{1}{c_p \rho} (\varepsilon_л + \varepsilon_ф) + k' \Delta T' + k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2};$$

$$\frac{dq'}{dt} - \bar{\gamma}_q w = -\frac{m}{\rho} + k' \Delta q + k \frac{\partial^2 q}{\partial z^2}, \qquad (1.7)$$

Методы решения

При решении любой мезометеорологической задачи величины, характеризующие основное состояние, считаются известными, например, по наблюдениям или из прогноза. Должны быть заданы также распределения таких мезометеорологических факторов, как рельеф местности и ее температурная неоднородность.

В случае, если мезометеорологическая задача решается как нестационарная, т. е. путем интегрирования уравнений по времени и отыскания установившегося режима, должны быть заданы еще и начальные условия. В качестве последних обычно принимаются: отсутствие всех возмущений в полях метеоэлементов, равенство u и v их фоновым значениям и $w=0$.

Найдя тем или иным путем мезометеорологические возмущения метеорологических элементов и сложив эти величины с их фоновыми значениями, мы и получаем уточнение или детализацию прогноза для конкретного района.

Вопросы для самоконтроля:

1. Основные предположения при выводе уравнений мезопроцессов.
2. Получите Уравнения для движения.
3. Выведите уравнение неразрывности.